

Kirchheim ,A.^{*)}, Rudnicki ,A.^{**)}

DIE DARSTELLUNG DES FAHRGÄSTEFLOSSES IM NAHVERKEHR ALS EIN STOCHASTISCHER PROZESS

1. Einleitende Bemerkungen :

Der Personennahverkehr als Teilsystem des städtischen Verkehrs wird wie alle anderen Teilsysteme durch zufällige Störungen beeinflusst . Die hierbei auftretenden realen Größen - im Unterschied zu geplanten Größen (z. B. Fahrpläne u.ä.) - stellen Zufallsgrößen dar , deren Verhalten durch ihre Verteilungsgesetze zu beschreiben sind . Es werden folgende Gruppen von Größen unterschieden , die den öffentlichen Personennahverkehr (im weiterem : ÖPNV) bestimmen :

- Linienführung mit Fahrzeugfolge und Einwirkung anderer Verkehrsteilnehmer
- eingesetzte Fahrzeugtypen mit ihrer Kapazität , ihrer Zuverlässigkeit , Nutzerservice und Bedieneigenschaften für die Fahrzeugführer
- Auslastung und Passagierverhalten

Diese Größen sind gruppenübergreifend ; so kann durch Fahrzeugausfälle (z.B. geringe Zuverlässigkeit , ungünstige Bedieneigenschaften der Fahrzeuge) die Fahrzeugfolge auf der Linie wesentlich beeinflusst werden . Ebenso besteht ein wechselseitiger Zusammenhang zwischen Fahrzeugfolge und Nutzerservice auf der einen Seite und Passagierverhalten und Auslastung auf der anderen Seite . **ADAMSKI (1992)** betrachtet das Ein - und Aussteigverhalten der Passagier und den sich daraus ergebenden Einfluß auf die Haltedauern der Fahrzeuge an den jeweiligen Haltestellen . Neben der individuellen Ein- und Aussteigedauern der einzelnen Passagiere wirken sich die Ein- und Aussteigeregeln und die Anzahl einsteigender und aussteigender Fahrgäste auf die Haltedauer aus . Die Haltedauern beeinflussen andererseits die Fahrplanteue der eingesetzten Fahrzeuge und somit die Zuverlässigkeit der Linie des ÖPNV .

In diesem Vortrag soll der Zusammenhang zwischen Fahrzeugfolge auf einer Linie und der Anzahl der einsteigenden Personen untersucht werden . Beobachtungen über die Ankunftszeiten von Personen (Zeitpunkte ihres Eintreffens) an Haltestellen wurden von **RUDNICKI (1977 , 1992)** erfaßt und ausgewertet. Die dort gewonnen Ergebnisse bilden die Grundlage für die vorgenommene Modellierung .

2. Modell der Personenankünfte an einer Haltestelle

^{*)} Bauhaus- Univers. Weimar , Wiss.-Bereich Mathemat. Opt. & Operat. Research,
Coudraystr. 13 , D - 99421 Weimar

<sup>**)Cracow Univers. of Technology , Institut of Roads and Railway , ul. Warszawska 24
31- 155 Krako'w , Poland</sup>

Um den Ablauf der Passagierankünfte zu beschreiben, wird von der Überlagerung zweier Punktprozesse ausgegangen.

$T_0^{\circ}, T_1^{\circ}, T_2^{\circ}, \dots$ sind die realen (nicht fahrplanmäßigen) Ankunftszeiten der Fahrzeuge (öffentlichen Verkehrsmittel: hier Bus) an einer Haltestelle der betrachteten Linie.

In einem ausgewählten Zeitabschnitt eines Tages kann dieser Punktprozeß als ein modifizierter Erneuerungsprozeß angenommen werden. Schließt man die Übergänge zwischen den Tagesabschnitten aus den Betrachtungen aus, so kann man von einem gewöhnlichen Erneuerungsprozeß ausgehen. Die Busankunftszeitpunkte werden als Erneuerungszeitpunkte und die Zwischenzeiten als Erneuerungszeiten gedeutet. Der Zeitraum $[T_{n-1}^{\circ}, T_n^{\circ}]$ wird im weiteren als Periode bezeichnet.

$Z_n := T_n^{\circ} - T_{n-1}^{\circ}$ ist die Dauer der n -ten Periode (Periodenlänge). Diese Z_n stellen die Erneuerungsauern des obigen Erneuerungsprozesses dar.

In die jeweilige Periode ist der Ankunftsprozeß der Passagiere an einer Haltestelle eingebettet. Da für die Busfolge ein gewöhnlicher Erneuerungsprozeß vorausgesetzt wird, genügt es, eine beliebige Periode aus diesem Prozeß herauszugreifen und zu betrachten.

T_k : Zeitpunkt, an dem die k -te Person in der betrachteten Periode an der Haltestelle eintrifft, um auf den nächsten Bus zu warten ($k = 0, 1, 2, \dots$).

Es wird vorausgesetzt: $T_0 = T_{n-1}^{\circ}$ und $T_k \in [T_{n-1}^{\circ}, T_n^{\circ}]$

Häufig nimmt man, daß die Zeitpunkte T_k einen stationären Poissonprozeß bilden. Die Untersuchungen von **RUDNICKI** zeigen, daß dies nicht der Fall ist. Bezeichnet man mit S_k den Zeitraum zwischen zwei eintreffenden Personen ($S_k := T_k - T_{k-1}$ für $k = 1, 2, 3, \dots$), so kann man i. Allg. hier nicht voraussetzen, daß die Zufallsvariablen S_1, S_2, S_3, \dots identisch und unabhängig verteilt sind.

Das Verteilungsgesetz der Zwischenzeit S_k hängt von der zeitlichen Entfernung (In-stationarität) zur Ankunftszeit des nächsten Busses ab. Die statistischen Untersuchungen deuten an, daß diese zeitlichen Entfernungen sich durch unterschiedlichen Ankunftsrate der Passagiere in den Verteilungsgesetze auswirken. Auf welche Ankunftszeit des Busses - die fahrplanmäßige oder die tatsächliche - man den zeitlichen Abstand beziehen muß, hängt von dem Charakter der Haltestelle ab. Es werden hier zwei Arten von Haltestellen unterschieden:

- (a) Haltestellen mit hoher Busfrequenz (z. B. Busfolge im Mittel aller 5 Minuten oder kürzer).
- (b) Haltestelle mit geringer Busfrequenz (z. B. Busfolge im Mittel aller 15 Minuten oder länger).

Bei Haltestellen vom Typ (a) orientieren sich die Passagiere nicht an einem Fahrplan. Sie treffen zufällig an der Haltestelle ein oder beeilen sich, wenn der Bus sich der Haltestelle

nähert und sie sich in der Nähe der Haltestelle befinden . Nähe bedeutet hier , der Passagier kann in die Buslinie einsehen und ist nicht weiter von der Haltestelle entfernt , als zulässig ist , um zu Fuß bis zur Busabfahrt diese Stelle noch zu erreichen . Durch das Annähern des Busses entsteht eine "Sogwirkung" , was sich durch einen Anstieg der Ankunftsrate bemerkbar macht . Nach der Abfahrt fällt diese Rate ab .

Bei der Haltestelle vom Typ (b) orientieren sich die Passagiere am Fahrplan . Sie treffen in der Nähe der planmäßigen Abfahrtszeit häufiger an der Haltestelle ein , als weiter früher oder danach . Die Ankunftsrate ist eine schiefe Funktion über dem zeitlichen Abstand zum planmäßigen Ankunftszeitpunkt .

Um die Periode $[T_{n-1}^{\circ}, T_n^{\circ}]$ in der gleichen Richtung zu durchlaufen wie die Zeit selbst abläuft , wird folgende Transformation vorgenommen :

$v := t - t_{n-1}^{\circ}$ mit $t \in [t_{n-1}^{\circ}, T_n^{\circ}]$ bei einer Haltestelle vom Typ (a) ; wobei $T_{n-1}^{\circ} = t_{n-1}^{\circ}$ bedeutet , daß der (n - 1)-te Bus im Zeitpunkt t_{n-1}° abgefahren ist .
 $v := t - t_{n-1}^p$ mit t_{n-1}^p als letzte (jüngste) Abfahrtszeitpunkt laut Fahrplan bei einer Haltestelle vom Typ (b) .

$\varphi(v)$: Ankunftsrate (Ankunftsintensität) im Zeitpunkt $T_n^{\circ} + V$ mit $V = v$ bzw. $t_p + v$

$N(v)$: Anzahl der im Zeitraum $[t_{n-1}^p, t)$ bzw. $[t_{n-1}^{\circ}, t)$ eingetroffenen Passagiere mit $t = t_{n-1}^p + v$ bzw. $t = t_{n-1}^{\circ} + v$.

Dann gilt - falls Grenzwert und Erwartungswert existieren -

$$\varphi(v) = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{E(N(v + \Delta v) - N(v))}{\Delta v} \quad (1)$$

Falls der Passagierstrom ein stationärer Poissonstrom ist , gilt $\varphi(v) = \text{const.}$
 Von den Größen , die sich aus dem Passagierstrom an einer Haltestelle ableiten lassen , sollen hier die Wartezeit auf den Bus und die Anzahl der einsteigenden Passagiere betrachtet werden .

3. Beschreibung der Gesamtwartezeit der Passagiere an einer Haltestelle

N_n : Anzahl der Passagiere , die in der n-ten Periode $[T_{n-1}^{\circ}, T_n^{\circ})$ an der Haltestelle eintreffen und dort auf den Bus warten .

T_k : der Zeitpunkt , an dem der k-te Passagier in der n-ten Periode eintrifft ; $k = 1, 2, \dots, N_n$

$W_k := T_n^{\circ} - T_k$ ist die Wartezeit des k - ten Passagiers an der Haltestelle .

Die Gesamtwartezeit W aller Personen an einer Haltestelle in einer Periode beträgt somit

$$W = \sum_{k=1}^{N_n} W_k = N_n \cdot Z_n - \sum_{k=1}^{N_n} \sum_{l=1}^k S_k = N_n \cdot Z_n - \sum_{k=0}^{N_n-1} (N_n - k) \cdot S_{k+1} \quad (2)$$

unter der Bedingung

$$S_1 + S_2 + \dots + S_k \leq Z < S_1 + S_2 + \dots + S_k + S_{k+1}, \text{ wenn das Ereignis } \{N_n = k\} \text{ vorliegt.}$$

Hieraus erhält man als mittlere Gesamtwartezeit

$$E(W) = E(N_n \cdot Z_n) - E\left(\sum_{k=0}^{N_n-1} (N_n - k) \cdot S_{k+1}\right), \quad (3)$$

wobei im allgemeinen Fall eine stochastische Abhängigkeit zwischen den Zufallsvariablen in (2) bzw. in (3) besteht.

An einer Haltestelle kann man davon ausgehen, daß der zeitliche Abstand Z_n Einfluß auf die Anzahl der wartenden Passagiere hat. Bzgl. der Gesamtstrecke haben auch die Passagierzahlen an den Haltestellen Einfluß auf die Busabstände Z_n . Dieser Einfluß wird nicht untersucht (hierzu siehe ADAMSKI). Aus der obigen Annahme eines gewöhnlichen Erneuerungsprozesses folgt, daß in einem betrachteten Tagesabschnitt (z.B. 6:00 - 7:30 Uhr, 11:00 - 13:00 Uhr o.ä.) die Z_n stochastisch unabhängig und identisch verteilt sind.

Der Zustand der n -ten Periode zwischen zwei aufeinander folgender Busse wird durch die stochastische Größe $(N_n, Z_n, S_1^n, S_2^n, \dots, S_{N_n}^n)$ beschrieben. Wenn im weiteren der Index n weggelassen wird, erhält man unter Beachtung der entsprechenden Rand- und bedingten Verteilungen für die mittlere Gesamtwartezeit aller wartender Passagiere in einer Periode

$$\begin{aligned} E(W) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(N = k) \cdot \left\{ k \cdot E(Z / N = k) - \sum_{l=1}^k (k - l + 1) \cdot E(S_l / N = k) \right\} \quad (4) \\ &= \int_0^{\infty} t \cdot E(N / Z = t) \cdot f_Z(t) \cdot dt \\ &\quad - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^k (k - l + 1) \cdot \int_{t=0}^{\infty} E(S_l / Z = t, N = k) \cdot P(n = k / Z = t) \cdot f_Z(t) \cdot dt \quad (4a) \end{aligned}$$

Um die Wirkung der Typen der Haltestellen auf die Wartezeit darzustellen, ist die Ankunftsintensität $\varphi(t)$ aus (1) heranzuziehen, wobei für die Ankunft der Passagiere ein instationärer Poissonprozeß angenommen wird.

4. Ankunft der Passagiere an einer Haltestelle als instationärer Poissonprozeß

Um die beobachteten Veränderungen bei den Ankunftsintensitäten zu erfassen, wird das Modell des instationären Poisson-Prozesses bei **FAHRMEIR, L.; KAUFMANN, H.L.; OST, F** (pp. 91 - 92) verwendet.

$N(t)$: Anzahl an Passagieren, die in der Zeitdauer t an der Haltestelle eintreffen.

Der Prozeß $N(t)$ besitzt eine zeitabhängige Intensitätsfunktion $\varphi(t)$, so daß für die unabhängigen Zuwächse der Anzahl der eintreffenden Passagiere an der Haltestelle

im Zeitpunkt t mit $0 < t < z$, wenn die betrachtete Periode die Dauer $Z = z$ hat, gilt:

$$\begin{aligned} P(N(t+h)-N(t) = 1) &= \varphi(t) \cdot h + o(h) \text{ mit } \varphi(t) \geq \varphi_0 > 0 \\ P(N(t+h)-N(t) \geq 2) &= o(h) \end{aligned} \quad (5)$$

Aus (5) erhält man für die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Zuwachses von $N(t)$ in dem Zeitintervall $[t, t+v)$.

$$P(N(t+v) - N(t) = k) = \frac{[m(t+v) - m(t)]^k}{k!} \cdot e^{-[m(t+v) - m(t)]} \quad \text{für } k = 0, 1, \dots \quad (6)$$

mit der Leitfunktion $m(t) := \int_0^t \varphi(x) \cdot dx$.

Da der Poissonprozeß instationär ist, sind die Zwischenankunftszeiten S_1, S_2, \dots i.allg. nicht identisch verteilt und stochastisch abhängig. Für die bedingte Verteilung $P(S_n < t-v / T_{n-1} = v)$ mit $T_{n-1} = S_1 + S_2 + \dots + S_{n-1}$ erhält man

$$\begin{aligned} P(S_n < t-v / T_{n-1} = v) &= 1 - P(S_n \geq t-v / T_{n-1} = v) \\ &= 1 - P(N(t-v) - N(v) = 0) = 1 - \exp(-[m(t-v) - m(v)]) \end{aligned} \quad (7)$$

Man erhält für die Verteilung der Ankunftszeitpunkte T_n eine instationäre Erlangverteilung.

$$\begin{aligned} F_n(t) &= P(T_n < t) = P(S_1 + \dots + S_n < t) \\ &= 1 - e^{-m(t)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{m(t)^k}{k!} \end{aligned} \quad (8)$$

Da die Busankunftszeiten $T_1^0, T_2^0, T_3^0, \dots$ nach Voraussetzung einen Erneuerungsprozeß bilden, wird eine Periode herausgegriffen und o.B.d.Allg. ihr Beginn mit $t=0$ festgelegt. Setzt man voraus, daß die Ankünfte der Passagiere nicht von der Gesamtzahl N der einsteigenden Passagiere abhängt und der Einfluß der Busabstände durch Intensitätsfunktion $\varphi(t)$ beschrieben wird, dann erhält man unter diesen Annahmen

$$\begin{aligned} E(W) &= \int_0^\infty t \cdot m(t) \cdot f_Z(t) \cdot dt \\ &= \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} \int_0^\infty m(t)^k \cdot e^{-m(t)} f_Z(t) \cdot dt \sum_{l=1}^k \frac{k-l+1}{(l-1)!} \int_0^\infty m(s)^{l-1} e^{-m(s)} ds \end{aligned} \quad (9)$$

5. Anmerkungen zur Intensitätsfunktion $\varphi(t)$

Um die Integrale auswerten zu können, sind Annahmen über die Struktur von $\varphi(t)$ zu treffen.

In **RUDNICKI** werden Erhebungen vorgestellt, anhand derer Schätzungen von $\varphi(t)$ erfolgen, wobei man von der Definition (1) ausgeht. An Stelle des Grenzwertes werden die Quotienten für endliche Zeitabschnitte verwendet:

$$\varphi(t) \approx \frac{E(N(t + \Delta t)) - E(N(t))}{\Delta t}$$

Das Zeitintervall (Periode) zwischen aufeinander folgender Busse wird in zeitliche Abschnitte zerlegt und für die einzelnen Abschnitte über mehrere Busse die Mittelwerte

gebildet . Diese Mittelwerte sind Schätzungen für die Erwartungswerte $E(N(t + \Delta t))$ und $E(N(t))$. Wenn hinreichend viele Perioden untersucht wurden , kann man die Mittelwerte in Näherung als normalverteilt annehmen . Es ist dann möglich , gefundene Unterschiede auf Signifikanz zu testen .

Um die in (9) auftretenden Integrale möglichst einfach zu halten , empfiehlt sich , $\varphi(t)$ durch eine Treppenfunktion zu approximieren . Da man von der Hypothese ausgeht , daß in einer Periode der Verlauf der Intensitätsfunktion für alle Perioden gleich ist , bedeutet dies , daß $\varphi(t)$ eine periodische Funktion ist ; d. h.

$$\varphi(z_1 + \dots + z_k + v) = \varphi(z_1 + \dots + z_n + v) , \text{ wobei die } z_i \text{ Periodenlängen sind.}$$

Die Intensitätsfunktion benötigt man auch , wenn man die Parameter der Gesamtwartezeit W an einer Haltestelle durch Simulationsverfahren schätzen möchte .

Literatur :

ADAMSKI , A. : Probabilistic Models of Passengers Service Processes at bus stop .
Transpn. Res. - B , 26B (1992) , 4 pp. 253 - 259

FAHRMEIR , L. ; KAUFMANN , H. ; OST , F. : Stochastische Prozesse.
Carl Hanser Verlag , München Wien 1981 , S. 91 - 92

RUDNICKI , A. : Potoki pasażero'w w miejskiej komunikacji zbiorowej jako procesy stochastyczne .
Czasopismo Techniczne 81 (1977) 5 , pp. 16 - 21

RUDNICKI , A. ; Probabilistyczne mierniki oceny punctualnos'ci obsługi pasażero'w w komunikacji zbiorowej
Polskaja Akademia Nauk - Oddzial w Krakowie
Komisja Budownicta - Problemy inzynierii ladowej 1992 , pp. 135 - 146